建國中學數學推理思考研究社
課程講義（110年9月~111年1月）

目錄

17屆副社　洪肇澤　編

社團指導教師　王志傑老師

（明道樓2樓）

IG社帳　@ckhs_mlc_17

廣義算幾不等式

- 在數學上，對於數列x_1、x_2、x_3、x_4、…、x_n，其和除以其個數（即$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}{n}$）稱為該數列的*算術平均數*，以$A_n$表示；其積開個數次方根（即$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\ldots x_n}$）則稱為該數列的*幾何平均數*，以$G_n$表示。而這兩種平均數間存在著$A_n\geq G_n$的關係，稱為*算幾不等式*。
  - 命題P_n：對於n個正整數，$A_n\geq G_n$恆成立。
  - 證明法1（法國數學家柯西於1821年在其著作《分析教程》中給出的逆向歸納證明）

1. $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ \therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}\therefore \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，$P_2$成立。
2. 若P_k成立，那麼對於2k個正整數（令其為x_1、x_2、x_3、…、x_k和y_1、y_2、y_3、…、y_k，其中A_x、G_x、A_y、G_y分別為前者和後者的算術平均數與幾何平均數）
   $A_x\geq G_x$、$A_y\geq G_y$必成立（又已知P_2成立），
   因此$A_{2k}=\frac{A_x+A_y}{2}\geq\sqrt{A_x\cdot A_y}\geq\sqrt{G_x\cdot G_y}=G_{2k}$，則$P_{2k}$成立。
3. 若P_k成立，那麼對於「前k-1項為x_1、x_2、x_3、x_4、…、x_{k-1}並且第k項為A_{k-1}」的k個正整數，$A_k\geq G_k$必成立（且已知$x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{k-1}$
   $=(k-1)A_{k-1}$、$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdots x_{k-1}=G_{k-1}^{k-1}$），
   故$A_k=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{k-1}+A_{k-1}}{k}=\frac{(k-1)A_{k-1}+A_{k-1}}{k}=A_{k-1}$
   $\geq G_k=\sqrt[k]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdots x_{\mathrm{k-1}}\cdot A_{k-1}}=\sqrt[k]{G_{\mathrm{k-1}}^{\mathrm{k-1}}\cdot A_{\mathrm{k-1}}}$
   $\therefore$（同時乘k次方，得）$A_{k-1}^k\geq G_{k-1}^{k-1}\cdot A_{k-1}\therefore A_{\mathrm{k-1}}^{\mathrm{k-1}}\geq G_{\mathrm{k-1}}^{\mathrm{k-1}}\therefore A_{\mathrm{k-1}}\geq G_{\mathrm{k-1}}$，
   則P_{k-1}成立。
4. 由2.、3.可知：若P_k成立，則P_{2k}亦成立，導致P_{2k-1}、P_{2k-2}、P_{2k-3}、…、P_{k+1}皆成立；因此，若P_k成立，則P_{k+1}必成立。
5. 由1.、4.及數學歸納法得證：命題P_n「對於n個正整數，$A_n\geq G_n$恆成立」為真。

  - 證明法2（P. H. Diananda在1960年發表於《美國數學月刊》的數學歸納法證明）

1. P_2成立。
2. 設n=k時，命題P_k成立（即$A_k\geq G_k$），則對於x_1、x_2、x_3、…、x_k、x_{k+1}這k+1個數，有$\frac{x_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k}=\frac{x_{\mathrm{k+1}}+G_{\mathrm{k+1}}+G_{\mathrm{k+1}}+\cdots+G_{\mathrm{k+1}}}{k}$
   $\geq\sqrt[k]{x_{\mathrm{k+1}}\cdot G_{\mathrm{k+1}}\cdot G_{\mathrm{k+1}}\cdots G_{\mathrm{k+1}}}=\sqrt[k]{x_{\mathrm{k+1}}\cdot G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k-1}}}$，和$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\geq G_k$，兩式相加得
   $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k}\geq G_k+\sqrt[k]{x_{\mathrm{k+1}}\cdot G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k-1}}}\geq 2\sqrt{G_k\cdot\sqrt[k]{x_{\mathrm{k+1}}G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k-1}}}}$
   $=2\sqrt[2k]{(G_k^k\cdot x_{\mathrm{k+1}})\cdot G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k-1}}}=2\sqrt[2k]{G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k+1}}\cdot G_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k-1}}}=2G_{\mathrm{k+1}}$，
   其中$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=(\mathrm{k}+1)A_{\mathrm{k+1}}$，因此$\frac{(\mathrm{k}+1)A_{\mathrm{k+1}}+(k-1)G_{k+1}}{k}\geq 2G_{\mathrm{k+1}}$，
   $\therefore(\mathrm{k}+1)A_{\mathrm{k+1}}\geq 2kG_{\mathrm{k+1}}-(\mathrm{k}-1)G_{\mathrm{k+1}}=(\mathrm{k}+1)G_{\mathrm{k+1}}$，
   $A_{k+1}\geq G_{k+1}$，故n=k+1時，命題P_{k+1}亦成立。
3. 由1.、2.及數學歸納法得證：對於任意正整數n，
   命題P_n「對於n個正整數，$A_n\geq G_n$」恆成立。

  - 其他證明：亦可利用二項式定理、琴生不等式或排序不等式來證明算幾不等式。

平面國THE FLATLAND

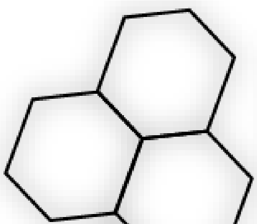
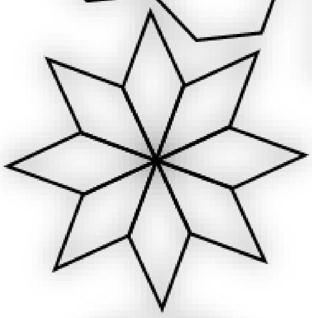
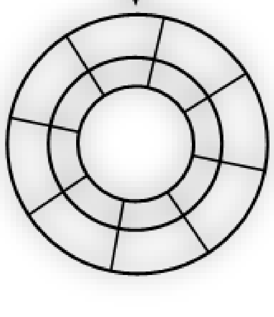
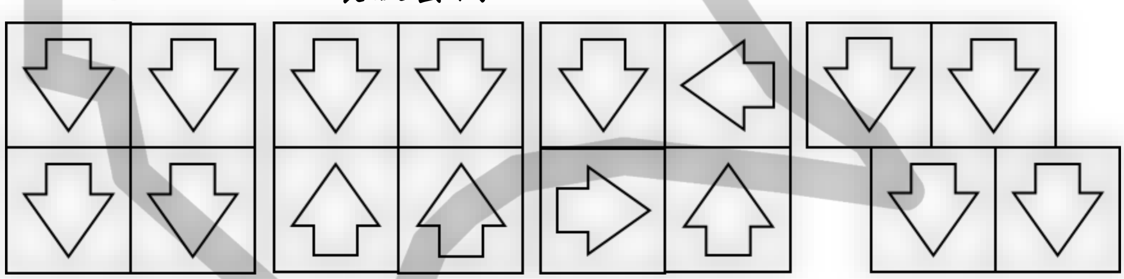
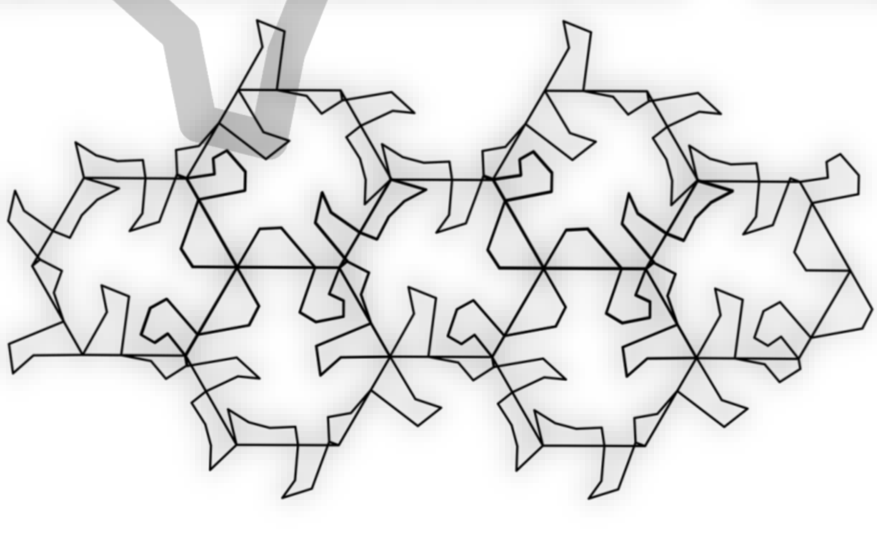
- 我遇見一個「正方形」，他告訴我在他的世界裡只有平面的兩維世界的存在，但是在他遇到一位從立體國來的「球體」之前，他從不曉得世界不只兩維，還有一維、三維、甚至四維以上的空間。以上是我對這本《平面國》小說的最簡單的介紹。這真的是一本相當有趣的科幻小說，寫在距今130年前，作者為當時英國著名的神學家愛德溫・A・艾勃特（Edwin Abbott Abbott），他用一個很單一、簡化的世界觀展開，卻試圖講敘多元世界與思維，以及在這個平面世界裡各種荒謬的社會現象。這部含有警世意味濃厚的諷刺科幻小說，作者寫作的時空背景是在英國維多利亞時期，對社會階級劃分嚴明的時代，一個世紀多後再回來看這部小說，卻發現當中所隱喻的社會階級制度、女性議題、社會革命、權力關係等，都和身處二十一世紀的社會沒什麼兩樣。

- 《平面國》分成二部分：世界、其他維度世界。第一部「世界」，由主角「正方形」介紹他所居住的二維世界平面國，例如在平面國裡有直線、三角形、正方形、五邊形、六邊形及其他各種圖形，社會最底層為「等腰三角形」，只要夠努力，會慢慢變形為中產階級的「正三角形」。在平面國裡，越多邊代表階級越高，其中最高階級，也凌駕一切之上的至尊則為「圓形」（祭司）。平面國的人因為只能像在一張無邊無際的紙張上，前後左右移動，並沒有上下的空間概念，自然也無法體會三維空間的世界。因此，第二部分「其他維度世界」，就是主角「正方形」夢見一維的直線國，以及遇見三維空間的球體來跟他解釋立體國的存在。

- 有趣的是，作者鋪陳的一維直線國無法理解二維平面國的世界，二維平面國無法理解三維的立體國，直到最後「正方形」終於理解三維世界的關鍵密碼：「向上移動，不是向北移動」，他才能從空間中去俯瞰自己原來所處的世界。這就好比我們都活在既定的框架之中，很難跳脫，如果這個社會有人打破框架，跳出來告訴大家另一種思維，有時反而被社會視為異類或異端。本書譯者賴以威就最末寫到：對平面國的人而言，不管是任何形狀看出去都是一條線，因此他們只透過嗅覺、觸覺、聽覺等三種方式來分辨不同階級的人。雖然他們的「肉眼」只能看見東南西北，但確擁有一個長在「面」上的「心眼」，可以看見不同幾合形狀的差異。賴以威認為，「這不就隱喻了我們一直誤以為的人與人相等的錯誤假設，實際上不平等的不只是社會階級，可能還包括思維、個性、價值觀等。」這部在1884年就寫完的《平面國》，具有科幻、神學、哲學等深遠的義含，長度屬於中篇小說，故事以簡單的幾合圖形、數學面向、神學反映人類所處的維度空間，有非常深遠的審視。一開始閱讀也許需要一些時間進入情節，但越到後面越引人省思，直到閱畢那些種種隱喻與反諷都啟發我們更多層次的思考。

- 老實說，看這本科幻小說，需要有點「悟性」！但絕對值得，也精采可期。

鑲嵌藝術

正十七邊形尺規作圖

- 一七九六年的一天，德國哥廷根大學，高斯吃完晚飯，開始做導師單獨佈置給他的每天例行的三道數學題。前兩道題在兩個小時內就順利完成了。第三道題寫在另一張小紙條上：要求只用圓規和一把沒有刻度的直尺，畫出一個正十七邊形。他感到非常吃力。時間一分一秒地過去了，第三道題竟毫無進展。高斯絞盡腦汁，但他發現，自己學過的所有數學知識似乎對解開這道題都沒有任何幫助。困難反而激起了他的鬥志：我一定把它做出來！他拿起圓規和直尺，他一邊思索一邊在紙上畫著，嘗試著用一些超常規的思路去尋求答案。當窗口露出曙光時，高斯長舒了一口氣，他終於完成了這道難題。見到導師時，高斯有些內疚和自責。他對導師說：「您給我布置的第三道題，我竟然做了整整一個通宵，我辜負了您對我的栽培……」導師接過學生的作業一看，當即驚呆了。他用顫抖的聲音對高斯說：「這是你自己做出來的嗎？」高斯有些疑惑地看著導師，回答道：「是我做的。但是，我花了整整一個通宵。」導師請他坐下，取出圓規和直尺，在書桌上鋪開紙，讓他當著他的面再做出一個正十七邊形。高斯很快做出了一個正十七邊形。導師激動地對他說：「你知不知道？你解開了一樁兩千多年歷史的數學懸案！阿基米德沒有解決，牛頓也沒有解決，你竟然一個晚上就解出來了。你是個真正的天才！」原來，導師也一直想解開這道難題。那天，他是因為失誤，才將寫有這道題目的紙條交給了學生，而高斯就這樣把它給解決了。
- 規矩數（又稱可造數）是指可用尺規作圖方式作出的實數。在給定單位長度的情形下，若可以用尺規作圖的方式作出長度為a的線段，則a就是規矩數。

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

- 正十七邊形尺規作圖之可行性：$\cos\frac{2\pi}{17}$是規矩數。
  - 法1

1. 令$17\theta = 2\pi$，則$16\theta = 2\pi - \theta$、$\sin 16\theta = -\sin\theta$。而根據兩倍角公式$\sin 16\theta$ $= 16\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta$，又$\sin\theta \neq 0$，因此$16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta = -1$。
2. 根據積化和公式，有
   $2(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta + \cos 8\theta) = -1$。
3. 令$x = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta$、$y = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$，
   則$x + y = \frac{-1}{2}$，且 $xy = -1$。又 $x > 0$，得$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$、$y = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$。
4. 再令$x_1 = \cos\theta + \cos 4\theta$、$x_2 = \cos 2\theta + \cos 8\theta$，則$x_1 + x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$，
   且$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{2}$，而$x_1 > x_2$；令$y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta$、$y_2 = \cos 6\theta + \cos 7\theta$，
   則$y_1 + y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$，且$y_1 \cdot y_2 = \frac{-1}{2}$，而$y_1 > y_2$。由上述可分別得$x_1$、$y_1$之值。
5. 有$\cos\theta + \cos 4\theta = x_1$和$\cos\theta \cdot \cos 4\theta = y_1$（其中$\cos\theta > \cos 4\theta$），
   故可再由x_1、y_1之值得$\cos\frac{2\pi}{17}$（即$\cos\theta$）之值。

- 法2

1. 在複數平面上，方程式$x^{17}-1=0$的全體根所代表的點是單位圓的一個內接正十七邊形的十七個頂點，其中一個頂點是實軸上的單位點1。

2. 令$\omega=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$，則方程式$x^{17}-1=0$的全體虛根可表示為$\omega^k(k\epsilon\mathbb{N}、1\le k\le 16)$，且這些虛根的總和為$-1$。

3. 將方程式$x^{17}-1=0$的全體虛根依下述規則排成一個數列：首項為ω；自第二項起，每一項都等於其前一項的3次方，但當任一項中ω的次數大於17時，則依$\omega^{17}=1$降低其次數（例如：第四項原為ω^{27}，可改寫成ω^{10}）。根據此規則所得的數列如下：
$\omega、\omega^3、\omega^9、\omega^{10}、\omega^{13}、\omega^5、\omega^{15}、\omega^{11}、\omega^{16}、\omega^{14}、\omega^8、\omega^7、\omega^4、\omega^{12}、\omega^2、\omega^6$

4. 將上述數列的奇數項依序寫成一數列、偶數項也依序寫成一數列；再將所得的兩數列又依奇數項與偶數項各得兩數列，並重複此步驟。令這些數列的級數分別為：

$$a=\omega+\omega^9+\omega^{13}+\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^8+\omega^4+\omega^2$$
$$x=\omega^3+\omega^{10}+\omega^5+\omega^{11}+\omega^{14}+\omega^7+\omega^{12}+\omega^6$$
$$b_1=\omega+\omega^{13}+\omega^{16}+\omega^4、b_2=\omega^9+\omega^{15}+\omega^8+\omega^2$$
$$y_1=\omega^3+\omega^5+\omega^{14}+\omega^{12}、y_2=\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^7+\omega^6$$
$$c_1=\omega+\omega^{16}、c_2=\omega^{13}+\omega^4$$

5. 略作計算，可得：

a與x是方程式$k^2+k-4=0$ 的兩根

b_1與b_2是方程式$b^2-ab-1=0$的兩根

y_1與y_2是方程式$y^2-xy-1=0$的兩根

c_1與c_2是方程式$c^2-b_1c+y_1=0$的兩根

6. $c_1=2\cos\frac{2\pi}{17}$，而根據上述a、x、b_1、y_1之值便可求得$\cos\frac{2\pi}{17}$的值。

- 正十七邊形尺規作圖之過程。
  - 法1：https://reurl.cc/0k6WZR
  - 法2

1. 作一單位圓O及一對互相垂直的直徑$\overline{AB}$與$\overline{CD}$。
2. 在圓O過點D的切線上作一點E，使得點E與點A在直線$\overleftrightarrow{CD}$的異側且$\overline{DE}=\frac{1}{4}$。
3. 在直線$\overleftrightarrow{DE}$上作點F與點G，使得$\overline{EF}=\overline{EG}=\overline{EO}$且點$F$與點$D$在點$E$的同側。
4. 在直線$\overleftrightarrow{DE}$上作點H與點K，使得$\overline{FH}=\overline{FO}$、$\overline{GK}=\overline{GO}$ 且點H與點G在點F的異側、點K介於點F與點G之間。
5. 在過點H且與直線$\overleftrightarrow{DE}$垂直的直線上作點L，使得$\overline{HL}=1+\overline{DK}$且點$L$與點$A$在直線$\overleftrightarrow{DE}$的同側。
6. 在直線$\overleftrightarrow{OA}$上作點M，使得點M在以$\overline{CL}$為直徑的圓上且$\overline{OM}>1$。
7. 設點P是$\overline{OM}$的垂直平分線與圓O的任一交點，則$\overline{AP}$是圓O內接正十七邊形的一邊。

古希臘三大作圖問題

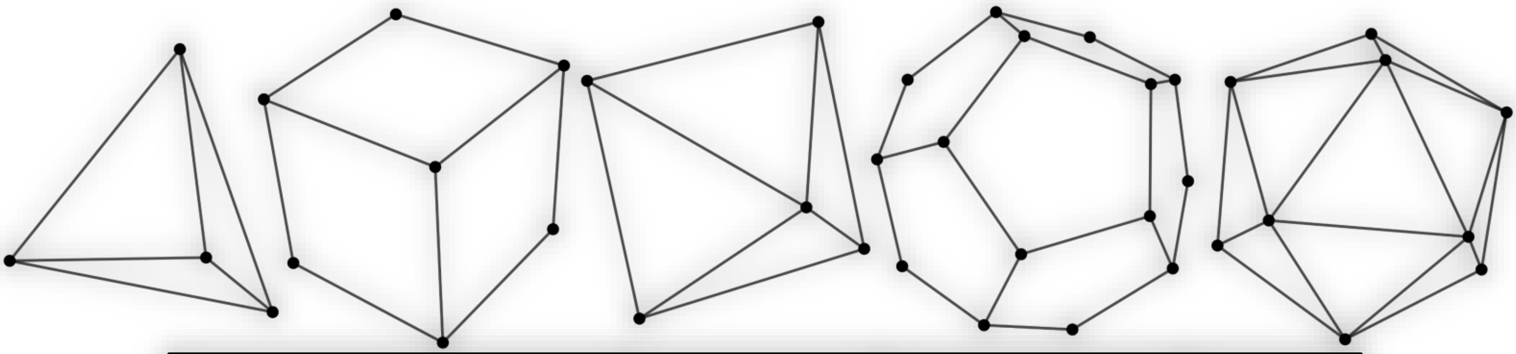
- 倍立方體：體積為兩倍的新立方體。
  - 根據古羅馬時代的歷史學家普魯塔克的記載，西元前四世紀時，希臘提洛島的內政問題嚴重，於是市民們前往太陽神的神殿尋求太陽神的意見。太陽神的神諭是製作正立方體、體積為太陽神祭壇兩倍的新祭壇。於是，市民們製作了長、寬、高都成為兩倍的新祭壇獻祭給太陽神，然而內政問題卻依然沒有解決。因為新祭壇的體積變成原來的八倍了。就在市民們熱中討論要如何作出體積兩倍的祭壇時，不知不覺間內政問題就解決了。也因此，倍立方體的問題又被稱為提洛島問題。
- 三等分角：把任意角度分成三等份。
  - 將給定的任意角度兩等分，是很簡單的尺規作圖問題。利用圓規，以角度的頂點為圓心畫一個圓弧，這個圓弧與角的兩邊有兩個交點，於是，再分別以這兩個焦點為圓心，以相同的半徑畫弧，將角的頂點與兩弧的交點相連，所形成的直線，就可以將角兩等分。既然可以將角兩等分，那把角三等分應該也不會太難吧。出乎意料的，這變成了作圖學的難題。
- 化圓為方：作出跟圓面積相同的正方形。
  - 圓面積的算法是$\pi\cdot$（半徑）^{2}，因此只要能做出圓的半徑的$\sqrt{\pi}$倍的線段，就能夠以此線段為邊長，做出與圓形面積相同的正方形了。英語裡有一句諺語「square the circle」（將圓形化為正方形），意思就是「企圖想做不可能的事」。這個問題也是從古到今，做圖學難題中的難題。
- 數學家花了2000年的時光，經年累月努力著想解開這些作圖難題。然而，倍立方體及三等分角在十七世紀、化圓為方在十九世紀，卻被證實了不可能只靠尺規作圖來解答。

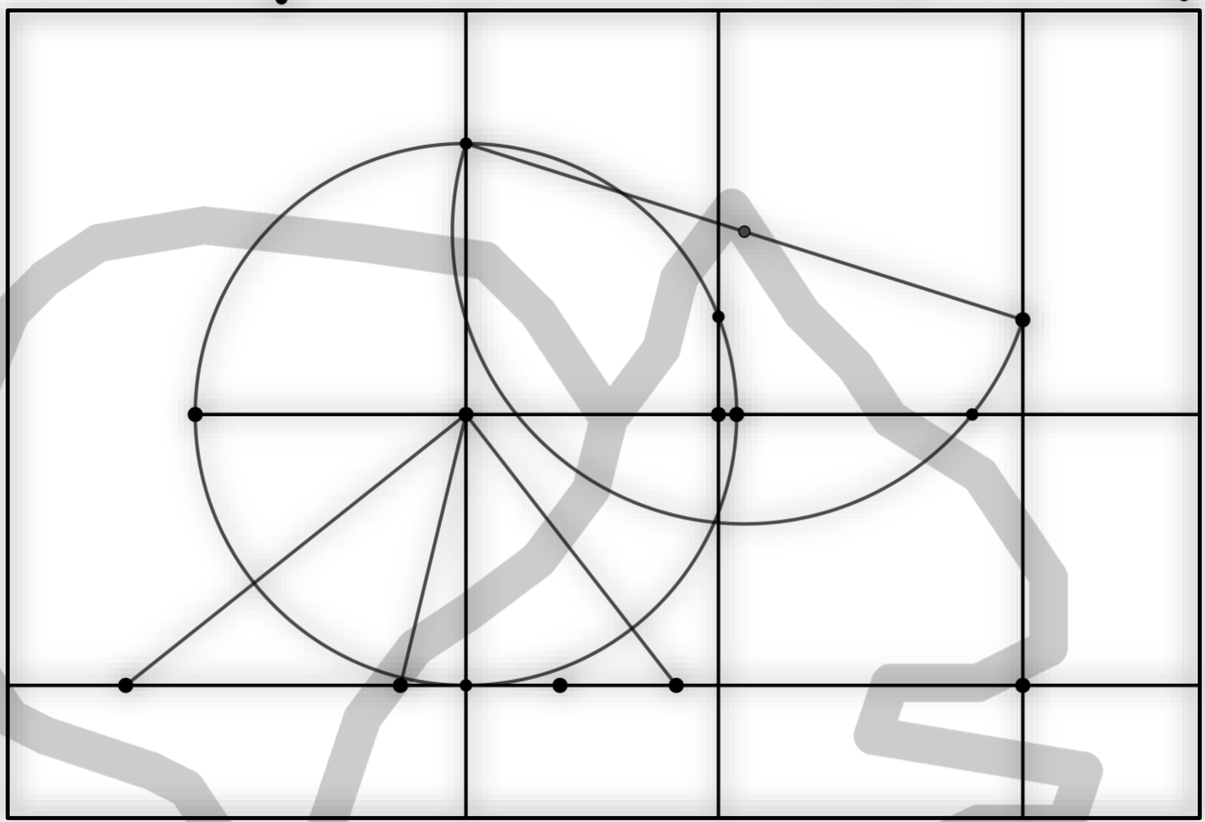
尤拉多面體公式

- 尤拉提出，柯西證明。公式：V-E+F=2（V頂點數、E稜線數、F面數）。
- 證明：令V-E+F=k，接下來對多面體做一些操作，觀察k值的變化。首先擦掉多面體的其中一面，然後將剩下的部分變形、擠壓畫到平面圖形上，這時它的k值較原本的多面體少1。再來對平面上的圖形不斷擦邊、擦角，而這些操作都不會改變k值。最後會擦到剩下一個三角形，此刻k值為1。原本多面體的k值較後來的k值多1，由此可知原本多面體的k值為2。

柏拉圖正多面體

- 古希臘時代，人們便知道有五種正多面體存在，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體以及正二十面體。當時的哲學家柏拉圖相信世界由四種物質構成，並且這些正多面體分別是組成不同物質的基本元素：正四面體組成火、正六面體組成土、正八面體面體組成風、正二十面體則組成水。（另外，柏拉圖認為宇宙存在著某個不為人知的、由正十二面體組成的「第五種物質」。）假如柏拉圖的「正多面體元素說」為真，每一種構成宇宙的物質確實都由某種正多面體組成，那麼有沒有可能宇宙根本不只是由五種物質構成，而正多面體也不只五種？事實上不會，因為後來就有人用數學證明了正多面體只有五種。
- 正多面體定義：所有的面皆為正多邊形且相互全等，而每個面與面之間的夾角都相等。
- 正多面體種類：（僅）正四、六、八、十二、二十面體（合稱柏拉圖正多面體）。
- （正多面體只有五種）證明：任意多面體的任意頂點必為「不少於三」個正多邊形（面）的共用頂點，因此只要列舉出所有可能情形便可得所有正多面體種類。可能情形包含：該頂點為（1）三個正三角形、（2）四個正三角形、（3）五個正三角形、（4）三個正方形、或（5）三個正五邊形的共用頂點。剛好，這五種可能情形就分別是正四、正六、正八、正十二、和正二十面體的情形，得證正多面體恰有五種。

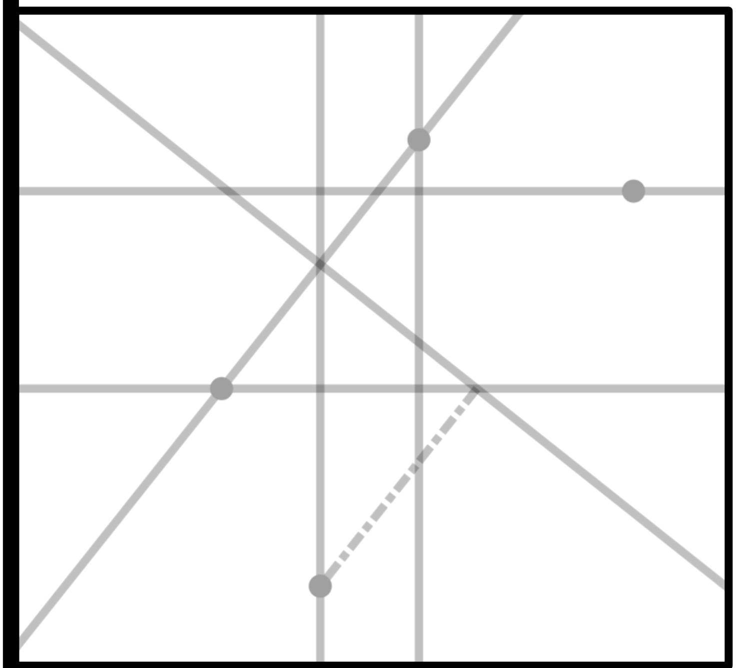


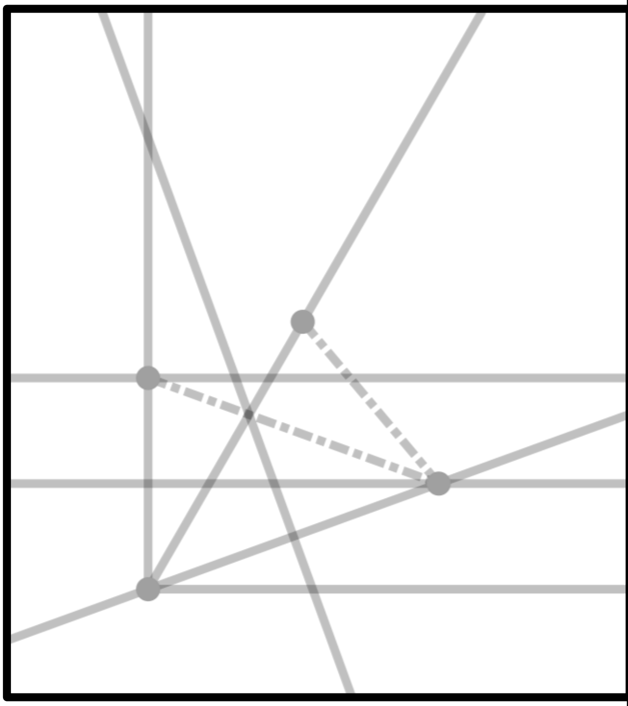


資料參考

- 維基百科。算術-幾何平均值不等式。（網址：https://reurl.cc/xEel5e）
- Jasmine。數位時代。書介《平面國》。（網址：https://reurl.cc/Yjm8xD）
- Ken Sze。YouTube。Flatland - The Film (Eng Subtitle)。（網址：https://reurl.cc/1ole6D）
- 維基百科。十七邊形。（網址： https://reurl.cc/r1kLpx ）
- 趙文敏。科學Online。高斯如何做正十七邊形。（網址：https://reurl.cc/35yOvj）
- 李永樂。YouTube。高斯如何做出正17邊形。（網址：https://reurl.cc/ARXAD3）
- 夢筠。隨意窩。高斯的正十七邊形。（網址：https://reurl.cc/ARXdE3）
- Numberphile。YT。How to trisect an angle with origami。（網址：https://reurl.cc/vgG74o）
- 賴以威。YouTube。艾雪鑲嵌。（網址：https://reurl.cc/9504aV）
- 大栗博司。臉譜。用數學的語言看世界。（ISBN：9789862355893）
- 崴仔的研究筆記。YT。為什麼正多面體只有五種。（網址：https://reurl.cc/73Ykmb）
- 維基百科。規矩數。（網址：https://reurl.cc/OkQvgr）
- bilibili。摺紙數學-扔掉工具，你能走的更遠。（網址：https://reurl.cc/l5nDOj ）
- 臺中市國民教育輔導團。利用摺紙將任意角三等分。（網址：https://reurl.cc/gzNDb7）

如果別人思考數學的真理像我一樣深入持久，
他也會找到我的發現。　　　——高斯





- 封面圖片
  - 艾雪《天與水》（圖片來源：https://reurl.cc/Zj8X5p）
  - 艾雪《遭遇》（圖片來源：https://reurl.cc/q1akj0）
  - 艾雪《白天與黑夜》（圖片來源：https://reurl.cc/px8LR4）
- 封底圖片
  - 三等分角摺紙作圖
  - 立方倍積摺紙作圖